Exercice 2 **5 points**

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ on considère les points :

$$A(1\,;\,1\,;\,-4),\quad B(2\,;\,-1\,;\,-3),\quad C(0\,;\,-1\,;\,-1)\quad \text{et}\quad \Omega(1\,;1\,;2).$$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x+y+z+2=0$.

3. **a.** Justifier que le point Ω n'appartient pas au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).

On admet que $\Omega\text{H} = 2\sqrt{3}$.
On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega\text{M} = 2\sqrt{3}$.

4. Justifier, sans calcul, que tout point N du plan (ABC), distinct de H, n'appartient pas à la sphère S.

On dit qu'un plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\text{K} \in \mathscr{P} \cap S$
- $(\Omega\text{K}) \perp \mathscr{P}$

5. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + y - z - 6 = 0$ et le point K de coordonnées K$(3\,;\,3\,;\,0)$.

Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S au point K.

6. On admet que les plans (ABC) et $\mathscr{P}$ sont sécants selon une droite (Δ).

Déterminer une équation paramétrique de la droite (Δ).